Lokal kompakte abelsche Gruppen und die Faltungsalgebra

Jannik Daun

February 19, 2025

Contents

1 Lokal kompakte abelsche Gruppen

Definition 1.1 (topologische Gruppe). Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe und τ eine Topologie auf G. Dann heißt $(G,+,\tau)$ eine topologische Gruppe, falls die Abbildungen

1. $(G,\tau)\times(G,\tau)\ni(x,y)\mapsto x+y\in(G,\tau)$ (Addition)
2. $(G,\tau)\ni x\mapsto -x\in(G,\tau)$ (Inversion)

stetig sind und (G,τ) ein Hausdorff Raum ist. Ist (G,τ) zusätzlich (lokal) kompakt, so heißt $(G,+,\tau)$ eine (lokal) kompakte abelsche Gruppe.

Example 1.2. $(\mathbb{Z},+)$ mit diskreter Topologie. $(\mathbb{R},+)$ mit der standard Topologie.

Proposition 1.3. *Sei $(G,+,\tau)$ eine topologische Gruppe. Dann gelten*

1. *$\forall x\in G$: ist die Translation $t_x: G\to G,\ t_x(g):=g+x$ ein Homöomorphismus.*
2. *$G\ni x\mapsto -x\in G$ ist ein Homöomorphismus.*
3. *$\forall A\in\tau$, $B\subset G$: $A+B\in\tau$*
4. *$A,B\subset G$ kompakt $\Rightarrow A+B$ kompakt*

Proof. Zu "1.": t_x ist die Komposition der stetigen Abbildung $g\mapsto(x,g)$ und $+$ (stetig da Komposition mit projektionen stetig). Das Inverse von t_x ist t_{-x} und damit wegen dem Gezeigten auch stetig. Zu "2.": Klar da inversion selbstinvers und inversion nach definition stetig ist. Zu "3.": $A+B=\bigcup_{b\in B}A+b$. Zu "4.": $A+B=+(A\times B)$ und Produkte kompakter Mengen sind kompakt. □

Definition 1.4. Eine Menge $M\subset G$ heißt symmetrisch, falls $-M=M$.

Proposition 1.5. *Ist $(G,+,\tau)$ eine topologische abelsche Gruppe so hat der Umgebungsfilter von 0 eine Basis die aus symmetrischen und offenen Mengen besteht. Ist $(G,+,\tau)$ LKA Gruppe so hat der Umgebungsfilter von 0 eine Basis die aus symmetrischen und kompakten Mengen besteht.*

Proof. $-U\cap U$ ist offene Nullumgebung für jede offene Nullumgebung U. Im lka fall: Basis von kompakten gibt es wegen Thm 2.7 im Papa Rudin (mit $K=\{0\}$, und U einer offenen Nullumgebung). $-K\cap K$ ist kompakte Nullumgebung für jede kompakte Nullumgebung K (Schnitte kompakter sind kompakt in HD raum). □

Proposition 1.6. *G lca. Sei $W\subset G$ eine Nullumgebung. Dann existiert eine symmetrische und kompakte/offene Nullumgebung V mit $V+V\subset W$.*

Proof. $+$ ist stetig und $0+0=0$. Also existiert eine Umgebung $U \subset G \times G$ von $(0,0)$ mit $+(U) \subset W$. Nun existieren $U_1, U_2 \subset G$ offene Umgebungen von 0 mit $U_1 \times U_2 \subset U$ (Eigenschaft der Produkttopologie). Sei $U_3 := U_1 \cap U_2$. Dann ist U_3 offene Nullumgebung. Wegen Proposition 1.5 existiert kompakte/offene, symmetrische Nullumgebung V mit $V \subset U_3$ und insgesamt

$$V + V = +(V \times V) \subset +(U) \subset W.$$

$\square$

Proposition 1.7 (Quotientengruppe). *$(G, +, \tau)$ lca. $H \subset G$ abgeschlossene Untergruppe. Betrachte Quotientengruppe G/H. Sei $\pi : G \to G/H$ die Projektion. Sei*

$$\tau_q := \{V \subset G/H : \pi^{-1}(V) \in \tau\}.$$

Dann ist $(G/H, +, \tau_q)$ eine LKA Gruppe und π ein stetiger, surjektiver, offener Gruppenhomomorphismus.

Example 1.8 (Torus). Betrachten $\mathbb{R}$ als lca Gruppe. Dann ist $2\pi\mathbb{Z}$ eine abgeschlossene Untergruppe. Definiere den Torus

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

als die Quotientengruppe.

2 Haar Maß

Definition 2.1 (Borel σ-Algebra). (X, τ) topologischer Raum. Borel σ-Algebra $\mathfrak{B}(X) :=$ die kleinste σ-Algebra die τ enthält.

Definition 2.2 (Radon Maß). Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Maß μ auf $\mathfrak{B}(X)$ heißt *Radon Maß*, falls

1. μ ist endlich auf kompakten Mengen:
$$\forall K \subset X \text{ kompakt } : \mu(K) < \infty.$$
2. μ ist von außen regulär:
$$\forall E \in \mathfrak{B}(X) : \mu(E) = \inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ offen}}} \mu(U).$$
3. μ ist für offene Mengen von innen regulär:
$$\forall U \in \tau : \mu(U) = \sup_{\substack{K \subset U \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K).$$

Proposition 2.3. *Sei (X, τ) ein lokal kompakter topologischer Raum und μ ein Radon Maß auf $\mathfrak{B}(X)$ und $p \in [1, \infty)$. Dann ist $C_c(X)$ dicht in $L^p(\mu)$.*

Proof. 3.14 Rudin RCA. $\square$

Definition 2.4 (Haarsches Maß). Sei $(G, +, \tau)$ lka Gruppe. Ein Maß μ auf $\mathfrak{B}(G)$ heißt *Haarsches Maß*, falls

1. $\mu \neq 0$.
2. μ ist ein Radon Maß.
3. μ ist translationsinvariant:
$$\forall x \in G, S \in \mathfrak{B}(G) : \mu(x + S) = \mu(S).$$

Remark 2.5. Ist G kompakt so ist jedes Haarsches Maß auf G endlich, ist G σ-kompakt (abzählbare vereinigung von Kompakta) so ist jedes Haarsche Maß auf G σ-endlich.

Theorem 2.6 (Existenz und Eindeutigkeit vom Haar Maß). *Jede lka Gruppe hat ein Haar Maß. Sind μ, ν Haarsche Maße, dann existiert $c \in (0, \infty)$ mit $\mu = c\nu$.*

Example 2.7. Auf diskreten abelschen Gruppen ist das Zählmaß das Haarsche Maß. Auf $\mathbb{R}$ ist das Lebesgue-Maß λ das Haarsche Maß. Auf $\mathbb{T}$ ist

$$\mu(B) := \lambda([0, 2\pi) \cap \pi^{-1}(B))$$

das Haarsche Maß.

Proposition 2.8 (Einfache Eigenschaften von Haarschen Maßen). *Sei $(G, +, \tau)$ lka Gruppe und μ Haarsches Maß. Dann gelten:*

1. $\forall f \in \mathscr{L}^1(G), y \in G$
$$\int_G f(\bullet + y) d\mu = \int_G f d\mu,$$
2. $\varnothing \neq V \in \tau \Rightarrow \mu(V) > 0$,
3. *sind $f, g \in C(G)$ μ a.e. gleich, so sind sie gleich,*
4. $\forall S \in \mathfrak{B}(G) : \mu(-S) = \mu(S)$,
5. *für alle $f \in \mathscr{L}^1(G) : \int_G f(-x) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$.*

Proof. Zu "1.": Sei t die Translation um y. Dann gilt $t_* \mu = \mu(\bullet - y) = \mu$. Wegen der Transformationsformel gilt daher

$$\int_G f(\bullet + y) d\mu = \int_G f d(t_* \mu) = \int_G f d\mu.$$

Zu "2.": Beweis durch Widerspruch: Sei $\varnothing \neq V \in \tau$ und $\mu(V) = 0$. Obda ist V eine Nullumgebung (sonst translation um ein Element von V). Sei $K \subset G$ kompakt. Dann ist $K \subset \bigcup_{k \in K} k + V$. Also existieren $k_1, \ldots, k_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n k_i + V$ und daher

$$\mu(K) \leq \sum_{i=1}^n \mu(k_i + V) = \sum_{i=1}^n \mu(V) = 0.$$

Daraus folgt (da μ Radon Maß) $\mu = 0$.
Zu "3.": Beweis durch Widerspruch: Ist $f \neq g$ so ist $V := (f - g)^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ als Urbild einer offenen Menge offen. Außerdem ist $V \neq \varnothing$, da $f \neq g$. Also ist nach 2. $\mu(V) > 0$. Ein Widerspruch zu $f = g$ fast überall. Denn sein $N \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(N) = 0$ und $f = g$ im Komplement von N. Dann ist also $V \subset N$ und daher $0 < \mu(V) \leq \mu(N) = 0$.
Zu "4.": Definiere $\nu(S) := \mu(-S)$. Analog zu oben folgt, dass ν ein Radon Maß ist. Außerdem gilt alle $x \in G$:

$$\nu(x + S) = \mu(-(x + S)) = \mu(-S) = \nu(S).$$

Also ist ν ein Haarsches Maß und daher existiert $c \in (0, \infty)$ mit $\nu = c\mu$. Wählt man eine symmetrische offene Nullumgebung $U \subset G$ die in einem Kompaktum enthalten ist so folgt $c\mu(U) = \nu(U) = \mu(-U) = \mu(U)$. Also $c = 1$, da $\infty > \mu(U) > 0$.
Zu "5.": Folgt aus der Transformationsformel. □

3 Gleichmäßige Stetigkeit und Translation

Sei G abelsche topologische Gruppe und (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.1 (gleichmäßig stetig). Sei $E \subset G$ und $f : E \to X$. Dann heißt f gleichmäßig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0$ existiert eine Nullumgebung V mit $\forall x, y \in E$:

$$x - y \in V \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposition 3.2 (stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig auf Kompakta). *Sei $K \subset G$ kompakt und $f : K \to X$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Proof. Sei $\varepsilon > 0$. Für $x \in K$ sei $W(x) :=$ eine Umgebung von 0 mit $\forall y \in K \cap W(x) + x : d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. So ein W existiert, da f stetig und translation homöomorph. Für $x \in K$ sei $V(x) :=$ offene Umgebung von x mit $V(x) + V(x) \subset W(x)$. Da K kompakt existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^n x_j + V(x_j)$. Sei $U := \bigcap_{j=1}^n V(x_j)$. Dann ist U eine offene Nullumgebung. Seien $x, y \in K$ mit $y - x \in U$. Dann existiert $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in x_j + V(x_j) \subset x_j + W(x_j)$. Also $d(f(x), f(x_j)) < \varepsilon$. Per Annahme ist

$$y \in x + U \subset x_j + V(x_j) + U \subset x_j + V(x_j) + V(x_j) \subset x_j + W(x_j).$$

Also $d(f(x_j), f(y)) < \varepsilon$ und damit insgesamt

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(y)) < 2\varepsilon.$$

□

Theorem 3.3 (Translationen sind gleichmäßig stetig). *G LKA Gruppe, μ Haarsches Maß. Sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(G)$. Dann ist $G \ni x \mapsto f(\bullet - x)$ gleichmäßig stetig.*

Proof. Sei $\varepsilon \in (0, \infty)$. Sei $g \in C_c(G)$ mit $\|g - f\|_p < \varepsilon$. So ein g existiert, da $C_c(G)$ dicht in $L^p(G)$ ist. Sei K_1 der support von g. Sei K_2 eine kompakte Nullumgebung. Sei V eine Nullumgebung mit $V \subset K_2$ so, dass für alle $x \in V : \|g - g(\bullet - x)\|_\infty < \varepsilon\mu(K_1 + K_2)^{-p}$. Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\|g - g(\bullet - x)\|_p^p = \varepsilon^p \mu(K_1 + K_2)^{-1} \mu(K_1 + K_2).$$

Also gilt für alle $x \in V$:

$$\|f - f(\bullet - x)\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g(\bullet - x)\|_p + \|g(\bullet - x) - f(\bullet - x)\|_p < 3\varepsilon.$$

Seien nun $x, y \in G$ mit $x - y \in V$. Dann gilt (shift um y)

$$\|f(\bullet - y) - f(\bullet - x)\|_p = \|f - f(\bullet - (x - y))\|_p < \varepsilon.$$

□

4 Faltungs-Algebra

Seien X, Y lokal kompakte Hausdorff-Räume und μ, ν Radon Maße auf X bzw. Y.

Theorem 4.1 (Produkt für Radon-Maße). *Dann existiert ein eindeutiges Radon Maß ρ auf $X \times Y$ mit*

$$\forall f \in C_c(X), g \in C_c(Y) : \int f \otimes g \; d\rho = \int f d\mu \int f d\nu.$$

ρ wird das Radon Produkt *von μ und ν genannt.*

Theorem 4.2 (Fubini). *Ist $h \in \mathscr{L}^1(X \times Y)$. Dann ist $y \mapsto h(x, y)$ in $\mathscr{L}^1(Y)$ für fast alle $x \in X$ und die fast überall definierte Funktion $x \mapsto \int h(x, y) d\nu(y)$ ist in $\mathscr{L}^1(X)$ sowie*

$$\int h = \int \int h(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Theorem 4.3 (Tonelli). *Sei $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ messbar mit den folgenden Eigenschaften:*

- *$h = 0$ außerhalb einer σ-kompakten Teilmenge,*
- *$y \mapsto |h(x, y)| \in \mathscr{L}^1(Y)$ für fast alle $x \in X$,*
- *die fast überall definierte Funktion $x \mapsto \int |h(x, y)| d\nu(y)$ ist in $\mathscr{L}^1(X)$.*

Dann ist $h \in \mathscr{L}^1(X \times Y)$.

In weiteren Verlauf dieses Abschnittes sei G eine σ-kompakte LKA Gruppe und μ ein Haarsches-Maß auf G.

Theorem 4.4 (Konvolutions Algebra). *Definiere* $* : L^1(G) \times L^1(G) \to L^1(G)$ *durch*

$$(f * g)(x) := \int f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

im fast überall Sinn. Definiere $\ ^* : L^1(G) \to L^1(G)$ *durch*

$$f^*(x) := \overline{f(-x)}.$$

Dann ist $(L^1(G), *, \ ^*)$ *eine kommutative Banach-*$*$*-Algebra.*

Proof. Zur Wohldefiniertheit: Sei $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$. Es ist zu zeigen, dass das Integral in der Definition von $f * g$ fast überall existiert. Definiere $h : G \times G \to \mathbb{K}$ durch $h(x,y) := f(x-y)g(y)$. Dann ist h messbar, da h das Produkt messbarer Funktionen ist, denn $(x,y) \mapsto x - y$ und $(x,y) \mapsto y$ sind stetig. Es gilt

$$\int \int |h(x,y)| d\mu(x) d\mu(y) = \|f\| \|g\|.$$

Daher impliziert der Satz von Tonelli $h \in \mathscr{L}^1(G \times G)$. Der Satz von Fubini impliziert nun, dass $y \mapsto h(x,y) \in \mathscr{L}^1(G)$ für fast alle $x \in G$ und, dass die fast überall definierte Funktion $x \mapsto \int h(x,y) d\mu(y)$ in $L^1(G)$ ist.
Zur Submultiplikativität der Norm: Wegen Fubini:

$$\int |\int h(x,y) d\mu(y)| d\mu(x) \leq \int \int |h(x,y)| d\mu(y) d\mu(x) = \int \int |h(x,y)| d\mu(x) d\mu(y) = \|f\| \|g\|.$$

Zur Kommutativität: Für fast alle $x \in G$:

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)d\mu(y) = \int f(-y)g(y+x)d\mu(y) = \int f(y)g(x-y)d\mu(y) = (g * f)(x),$$

wobei Shiftinvarianz und Inversionsinvarianz verwendet wurden.
Zur Assoziativität: Seien $f, g, h \in L^1(G)$. Dann gilt für fast alle $x \in G$:

$$\begin{aligned}(f * (g * h))(x) &= \int f(x-z)(g * h)(z) d\mu(z) \\ &= \int \int f(x-z)g(z-y)h(y) d\mu(y) d\mu(z)\end{aligned}$$

Sei $x \in G$ in der fast überall Menge. Wegen dem für die Wohldefiniertheit gezeigtem: Die Funktion $k : G \times G \to \mathbb{C}$, $k(y,z) := f(x-z)g(z-y)h(y)$ ist messbar und die Funktion $y \mapsto |k(y,z)|$ ist in $\mathscr{L}^1(G)$ für fast alle $z \in G$. Die fast überall definierte Funktion $z \mapsto \int |k(y,z)| d\mu(y)$ ist in $L^1(G)$. Daher impliziert Tonelli, dass $k \in \mathscr{L}^1(G \times G)$ und Fubini impliziert

$$\begin{aligned}(f * (g * h))(x) &= \int \int f(x-z)g(z-y)h(y) d\mu(z) d\mu(y) \\ &= \int \int f(x-z-y)g(z)h(y) d\mu(z) d\mu(y) \\ &= \int (f * g)(x-y)h(y) d\mu(y) = ((f * g) * h)(x).\end{aligned}$$

Zur Bilinearität: Ist trivial.
Zu $*$-Algebra: $\ ^*$ anti-linear und involution ist klar, isometrie auch da μ inversions invariant. Seien $f, g \in L^1(G)$ Dann gilt für fast alle $x \in G$:

$$(f * g)^*(x) = \int \overline{f(-x-y)g(y)} d\mu(y) = \int \overline{f(y-x)g(-y)} d\mu(y) = (f^* * g^*)(x).$$

□

Definition 4.5 (Charakter und Duale Gruppe). $\gamma : G \to \mathbb{C}$ heißt *Charakter*, falls

- für alle $x \in G : |\gamma(x)| = 1$,
- für alle $x, y \in G : \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

Definiere die *duale Gruppe* $\hat{G}$ als die Menge aller stetiger Charaktäre (ist abelsche Gruppe mit punktweiser Multiplikation).

Theorem 4.6. *Sei Γ die Menge aller nicht-null Algebrahomomorphismen $L^1(G) \to \mathbb{C}$. Definiere $J : \hat{G} \to \Gamma$ durch*

$$J(\gamma)f := \int f(x)\gamma(x)d\mu(x).$$

Dann ist J bijektiv.

Proof. Zur Wohldefiniertheit: Sei $\gamma \in \hat{G}$. Da $\gamma \in L^\infty(G)$ ist $J(\gamma)$ als Funktional wohldefiniert. $J(\gamma) \neq 0$, da $|\gamma| = 1$. Es bleibt die Multiplikativität zu überprüfen. Wegen Fubini:

$$\begin{aligned} J(\gamma)(f * g) &= \int (f * g)(x)\gamma(x)d\mu(x) = \int f(x-y)g(y)d\mu(y)\gamma(x)d\mu(x) \\ &= \int\int f(x-y)\gamma(x-y)d\mu(x)g(y)\gamma(y)d\mu(y) \\ &= J(\gamma)fJ(\gamma)g. \end{aligned}$$

Zur Injektivität: Die Abbildung $\Phi : L^\infty(G) \to (L^1(G))'$ definiert durch $\Phi(g)f = \int gf\mu$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ mit $J(\gamma_1) = J(\gamma_2)$. Dann folgt $\gamma_1 = \gamma_2$ fast überall und wegen Proposition von oben + Stetigkeit die Gleichheit.
Zur Surjektivität: Sei $\varphi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ ein nicht-null Algebrahomomorphismus. Dann ist φ stetig und $\|\varphi\| \leq 1$. Es existiert $g \in L^\infty(G)$ mit $\Phi(g) = \varphi$ und $\|g\|_\infty \leq 1$. Für alle $f, h \in L^1(G)$ gilt (mit Fubini):

$$\begin{aligned} \varphi(f)\int gh &= \varphi(f)\varphi(h) = \varphi(f * h) \\ &= \int\int f(x-y)h(y)d\mu(y)g(x)d\mu(x) \\ &= \int\int f(x-y)g(x)d\mu(x)h(y)d\mu(y) \\ &= \int \varphi(f(\bullet - y))h(y)d\mu(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt für fast alle $y \in G$:

$$\varphi(f)g(y) = \varphi(f(\bullet - y)).$$

Sei $k \in L^1(G)$ mit $\varphi(k) \neq 0$. Die stetige (da Translationen stark stetig) Funktion $y \mapsto \varphi(k)^{-1}\varphi(k(\bullet - y))$ representiert also g und wir gehen gleich zu ihr über. Dann gilt für alle $f \in L^1(G)$ und $y \in G$:

$$\varphi(f)g(y) = \varphi(f(\bullet - y)).$$

Sei $x, y \in G$. Dann gilt

$$\varphi(k)g(x+y) = \varphi(k(\bullet - x - y)) = \varphi(k(\bullet - x))g(y) = \varphi(k)g(x)g(y).$$

Da $\varphi(k) \neq 0$ also folgt also für alle $x, y \in G : g(x+y) = g(x)g(y)$. Aus der Funktionalgleichung folgt $g(0) = g(0+0) = g(0)g(0)$, also $g(0) = 1$ oder $g(0) = 0$. Außerdem folgt aus der Funktionalgleichung für alle $x \in G : g(-x)g(x) = g(0)$. Daraus folgt $g(0) = 1$ da sonst $g = 0$ und daher $\forall x \in G : g(-x) = (g(x))^{-1}$. Da $|g| \leq 1$ folgt daraus $|g| = 1$. Also ist g ein Charakter. $\square$